Farkas' Lemma im Reellen und Komplexen

Angelina Degner

03. Juli 2013

Inhalt

1. Farkas' Lemma im Komplexen
   - Polare
   - Polyedrische Kegel
   - Farkas' Lemma im Komplexen und Korollare

2. Farkas' Lemma im Reellen
   - Konvexe Kegel
   - Separation durch Hyperebenen
   - Farkas' Lemma im Reellen mit Beweis
   - Kombinatorische Variante von Farkas' Lemma

Farkas' Lemma im Komplexen

Definition

*S nichtleere Menge in $\mathbb{C}^n$. Der **Polar** von S, S^* wird definiert durch* $S^* := \{y \in \mathbb{C}^n \mid Re(y^H S) \geq 0\}$.

Beispiele.

Farkas' Lemma im Komplexen

Definition

*S nichtleere Menge in $\mathbb{C}^n$. Der **Polar** von S, S^* wird definiert durch $S^* := \{y \in \mathbb{C}^n \mid Re(y^H S) \geq 0\}$.*

Beispiele.

1. S Unterraum des $\mathbb{C}^n$, dann: $S^\perp = S^*$.

Farkas' Lemma im Komplexen

Definition

*S nichtleere Menge in $\mathbb{C}^n$. Der **Polar** von S, S^* wird definiert durch $S^* := \{y \in \mathbb{C}^n \mid Re(y^H S) \geq 0\}$.*

Beispiele.

1. S Unterraum des $\mathbb{C}^n$, dann: $S^\perp = S^*$.
2. Sei $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$. Definiere $T_\alpha := \{z \in \mathbb{C} \mid \|arg(z)\| \leq \alpha\}$. Dann ist $(T_\alpha)^* = (T_{\frac{\pi}{2}-\alpha})$.

Farkas' Lemma im Komplexen

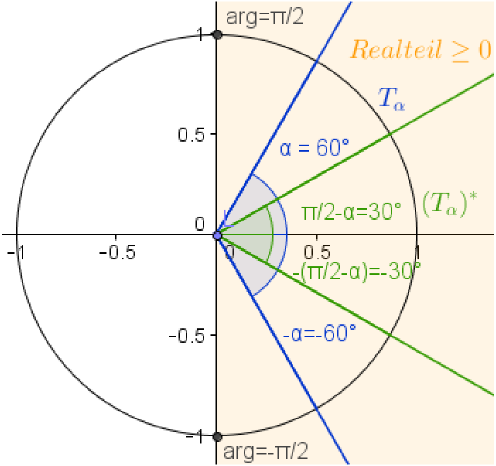
Definition

*S nichtleere Menge in $\mathbb{C}^n$. Der **Polar** von S, S^* wird definiert durch $S^* := \{y \in \mathbb{C}^n \mid Re(y^H S) \geq 0\}$.*

Beispiele.

1. S Unterraum des $\mathbb{C}^n$, dann: $S^\perp = S^*$.
2. Sei $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$. Definiere $T_\alpha := \{z \in \mathbb{C} \mid \|arg(z)\| \leq \alpha\}$. Dann ist $(T_\alpha)^* = (T_{\frac{\pi}{2}-\alpha})$.

2. Sei $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$. Definiere $T_\alpha := \{z \in \mathbb{C} \mid \|arg(z)\| \leq \alpha\}$. Dann ist $(T_\alpha)^* = (T_{\frac{\pi}{2}-\alpha})$.



3. Sei $\alpha \in \mathbb{R}^n$ mit $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}e$, wobei $e = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

   Definiere $T_\alpha := \{z \in \mathbb{C}^n \mid \|arg(z_i)\| \leq \alpha_i, i = 1, \dots, n\}$.
   Dann ist $(T_\alpha)^* = (T_{\frac{\pi}{2}e-\alpha})$.

Definition

$S \subset \mathbb{C}^n$ ist ein ***polyedrischer Kegel****, wenn ein $B \in \mathbb{C}^{n\times k}$, $k \in \mathbb{N}$, existiert mit $S = B\mathbb{R}^k_+ = \{Bx \mid x \in \mathbb{R}^k_+\}$, wobei $\mathbb{R}^k_+ := \{x \in \mathbb{R}^k \mid x_i \geq 0, i = 1, \dots, k\}$.*

Beispiele.

1. Ein komplexer, endlich dimensionaler Raum ist ein polyedrischer Kegel.
2. T_α ist ein polyedrischer Kegel.

Definition

*$S \subset \mathbb{C}^n$ ist ein **polyedrischer Kegel**, wenn ein $B \in \mathbb{C}^{n \times k}$, $k \in \mathbb{N}$, existiert mit $S = B\mathbb{R}_+^k = \{Bx \mid x \in \mathbb{R}_+^k\}$, wobei $\mathbb{R}_+^k := \{x \in \mathbb{R}^k \mid x_i \geq 0, i = 1, \ldots, k\}$.*

Beispiele.

1. Ein komplexer, endlich dimensionaler Raum ist ein polyedrischer Kegel.
2. T_α ist ein polyedrischer Kegel.

Theorem (Farkas' Lemma im Komplexen)

Sei $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{C}^m$, $S \subset \mathbb{C}^n$ *polyedrischer Kegel. Dann gilt:*
$Ax = b,\ x \in S$ *ist lösbar* $\Leftrightarrow$ $(\ A^H y \in S^* \Rightarrow Re(b^H y) \geq 0\ )$

Korollar (Farkas' Lemma im Reellen)

Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$. *Dann:*
$Ax = b,\ x \geq 0$ *ist lösbar* $\Leftrightarrow$ $(\ A^T y \geq 0 \Rightarrow b^T y \geq 0\ )$

Theorem (Farkas' Lemma im Komplexen)

Sei $A \in \mathbb{C}^{m\times n}, b \in \mathbb{C}^m, S \subset \mathbb{C}^n$ *polyedrischer Kegel. Dann gilt:*
$Ax = b,\ x \in S$ *ist lösbar* $\Leftrightarrow (\ A^H y \in S^* \Rightarrow Re(b^H y) \geq 0\ )$

Korollar (Farkas' Lemma im Reellen)

Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, b \in \mathbb{R}^m$*. Dann:*
$Ax = b,\ x \geq 0$ *ist lösbar* $\Leftrightarrow (\ A^T y \geq 0 \Rightarrow b^T y \geq 0\ )$

Beweis.

Folgt aus reeller Version von Farkas' Lemma im Komplexen mit $S = \mathbb{R}^n_+ = S^*$.
(Hier gilt $S = S^*$, denn: $x, y \in \mathbb{R}^n_+ \Rightarrow xy \geq 0$). □

Theorem (Farkas' Lemma im Komplexen)

Sei $A \in \mathbb{C}^{m \times n}, b \in \mathbb{C}^m, S \subset \mathbb{C}^n$ *polyedrischer Kegel. Dann gilt:*
$Ax = b,\ x \in S$ *ist lösbar* $\Leftrightarrow$ $(\ A^H y \in S^* \Rightarrow Re(b^H y) \geq 0\ )$

Korollar (Farkas' Lemma im Reellen)

Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m$*. Dann:*
$Ax = b,\ x \geq 0$ *ist lösbar* $\Leftrightarrow$ $(\ A^T y \geq 0 \Rightarrow b^T y \geq 0\ )$

Beweis.

Folgt aus reeller Version von Farkas' Lemma im Komplexen mit $S = \mathbb{R}^n_+ = S^*$.
(Hier gilt $S = S^*$, denn: $x, y \in \mathbb{R}^n_+ \Rightarrow xy \geq 0$). $\square$

Korollar

Sei $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{C}^m$, $\alpha \in \mathbb{R}^m$ mit $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2} e$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. *Das System $Ax = b$ mit $\|arg(x_i)\| \leq \alpha_i$ für $i = 1, \cdots, n$ ist lösbar*
2. $\|arg((A^H y)_i)\| \leq \frac{\pi}{2} - \alpha_i$ *für* $i = 1, \cdots, n \Rightarrow Re(b^H y) \geq 0$

Beweis.

Folgt aus Farkas' Lemma im Komplexen mit $S = T_\alpha$ und $S^* = T_{\frac{\pi}{2} e - \alpha}$. □

Korollar

Sei $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{C}^m$, $\alpha \in \mathbb{R}^m$ mit $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}e$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. *Das System $Ax = b$ mit $\|arg(x_i)\| \leq \alpha_i$ für $i = 1, \cdots, n$ ist lösbar*
2. $\|arg((A^H y)_i)\| \leq \frac{\pi}{2} - \alpha_i$ *für* $i = 1, \cdots, n \Rightarrow Re(b^H y) \geq 0$

Beweis.

Folgt aus Farkas' Lemma im Komplexen mit $S = T_\alpha$ und $S^* = T_{\frac{\pi}{2}e - \alpha}$. □

Farkas' Lemma im Reellen

Definition

*Die Menge $S \subset \mathbb{R}^n$ heißt **konvex**, falls $0 \leq \lambda \leq 1 \Rightarrow \lambda S + (1-\lambda)S \subset S$.*

*Der von $v_1, \ldots, v_m \in \mathbb{R}^n$ **aufgespannte (abgeschlossene) Kegel** ist*

$$cone(v_1, \ldots, v_m) := \{\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_m v_m \mid \lambda_i \geq 0 \ \forall i\}$$

Farkas' Lemma im Reellen

Definition

*Die Menge $S \subset \mathbb{R}^n$ heißt **konvex**, falls $0 \leq \lambda \leq 1 \Rightarrow \lambda S + (1-\lambda)S \subset S$.*

*Der von $v_1, \ldots, v_m \in \mathbb{R}^n$ **aufgespannte (abgeschlossene) Kegel** ist*

$$cone(v_1, \ldots, v_m) := \{\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_m v_m \mid \lambda_i \geq 0 \ \forall i\}$$

Farkas' Lemma im Reellen

Definition

*Die Menge $S \subset \mathbb{R}^n$ heißt **konvex**, falls*
$0 \leq \lambda \leq 1 \Rightarrow \lambda S + (1 - \lambda)S \subset S$.

*Der von $v_1, \dots, v_m \in \mathbb{R}^n$ **aufgespannte (abgeschlossene) Kegel** ist*

$$cone(v_1, \dots, v_m) := \{\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m \mid \lambda_i \geq 0 \ \forall i\}$$

Bemerkung

Aufgespannte abgeschlossene Kegel sind konvex.

Farkas' Lemma im Reellen

Definition

Die Menge $S \subset \mathbb{R}^n$ heißt ***konvex****, falls*
$0 \leq \lambda \leq 1 \Rightarrow \lambda S + (1-\lambda)S \subset S$.

Der von $v_1, \ldots, v_m \in \mathbb{R}^n$ ***aufgespannte (abgeschlossene) Kegel*** *ist*

$$cone(v_1, \ldots, v_m) := \{\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_m v_m \mid \lambda_i \geq 0 \; \forall i\}$$

Bemerkung

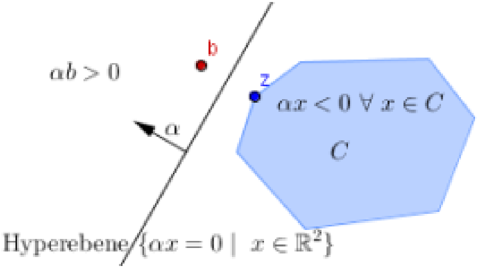
Aufgespannte abgeschlossene Kegel sind konvex.

Theorem (Hyperebenen–Separation)

Sei C eine abgeschlossene, nicht leere, konvexe Menge des $\mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^n \setminus C$. Dann gibt es ein $\alpha \in \mathbb{R}^n, \alpha \neq 0$ und ein $\beta \in \mathbb{R}$, so dass $\alpha b > \beta$ und $\alpha x < \beta$ für alle $x \in C$.

Theorem (Hyperebenen–Separation)

Sei C eine abgeschlossene, nicht leere, konvexe Menge des $\mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^n \setminus C$. Dann gibt es ein $\alpha \in \mathbb{R}^n, \alpha \neq 0$ und ein $\beta \in \mathbb{R}$, so dass $\alpha b > \beta$ und $\alpha x < \beta$ für alle $x \in C$.



Farkas' Lemma

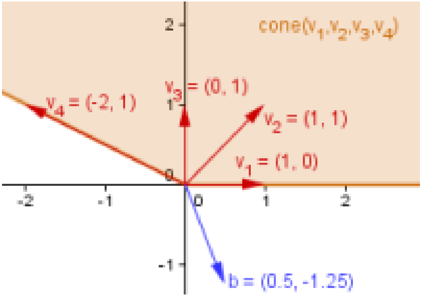
$A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $b \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt genau eine der folgenden Aussagen:

1. *Es gibt ein $x \in \mathbb{R}^m$, so dass $Ax = b$ und $x \geq 0$.*
2. *Es gibt ein $y \in \mathbb{R}^n$, so dass $yA \geq 0$ und $yb < 0$.*

Farkas' Lemma

$A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $b \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt genau eine der folgenden Aussagen:

1. *Es gibt ein $x \in \mathbb{R}^m$, so dass $Ax = b$ und $x \geq 0$.*
2. *Es gibt ein $y \in \mathbb{R}^n$, so dass $yA \geq 0$ und $yb < 0$.*



Farkas' Lemma (Kombinatorische Version)

Für jeden linearen Unterraum $W \subset \mathbb{R}^m$ *und* $M \in M(n \times m; \mathbb{R})$ *so, dass* $W = ker(M)$*, jedes* $A^+B^-(C \cup D)^0 \in \{0, +, -\}^E$*, wobei die Spalten von* M *durch* E *willkürlich indiziert werden, mit* $C \cap D = \emptyset$ *und jedes* $j \in A \cup B$ *gilt genau eine der folgenden Aussagen:*

1. $\exists\, X \in \mathcal{V}(M)(= \{sign(x) \mid x \in W\})$, *so dass* $X(A) \subseteq \{0, +\}, X(B) \subseteq \{0, -\}, X(C) \subseteq \{0\}$ *und* $X(j) \neq 0$.
2. $\exists\, Y \in \mathcal{V}^*(M)(= \{sign(y) \mid y \in W^\perp\})$, *so dass* $Y(A) \subseteq \{0, +\}, Y(B) \subseteq \{0, -\}, Y(D) \subseteq \{0\}$ *und* $Y(j) \neq 0$.

Quellen

- Anderson, Laura; Lectures on oriented matroids; 7. Oktober, 2006; Unfertige Notizen.
- Ben-Israel, Adi; Linear Equations and Inequalities on Finite Dimensional, Real or Complex, Vector Spaces: A Unified Theory*; Journal of Mathematical Analysis and Applications 27 (1969); Seite 367-389.

- Ben–Israel, Aldi und Greville, Thomas N.E.; Generalized Inverses: Theory and Applications; Wiley; 1974; Seite 7-8;63-64;
- Heuser, Harro; Lehrbuch der Analysis Teil 1; 16. Auflage; 2006; Teubner Verlag; Seite 225/226.
- Basic Properties of Convex Sets; `http://www.cis.upenn.edu/~cis610/convex1-09.pdf`, Zugriff 07.06.2013
- David P. Williamson; Lecture 5; `http://people.orie.cornell.edu/dpw/orie6300/Lectures/lec05.pdf`, Zugriff 07.06.2013
- David P. Williamson; Lecture 6; `http://people.orie.cornell.edu/dpw/orie6300/Lectures/lec06.pdf`, Zugriff 07.06.2013
- David P. Williamson; Lecture 7; `http://people.orie.cornell.edu/dpw/orie6300/Lectures/lec07.pdf`, Zugriff 07.06.2013
- R. Penrose; A Generalized Inverse for Matrices; 1954; `http://faculty.kfupm.edu.sa/MATH/jaafarm/lec-notes/Moore-Pinrose.pdf`, Zugriff Zugriff 07.06.2013

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!